ΘΕΜΑ Α

A1 *Βλέπε Θεώρημα 1.1,σελ. 3, Τεύχος 3, Μαθηματικά Γ Λυκείου,Θ.Χαρμούση*

A2 *Βλέπε Θεώρημα 1.1,σελ. 5, Τεύχος 2, Μαθηματικά Γ Λυκείου,Θ.Χαρμούση*

A3 *Βλέπε σελ. 294, Τεύχος 2, Μαθηματικά Γ Λυκείου,Θ.Χαρμούση*

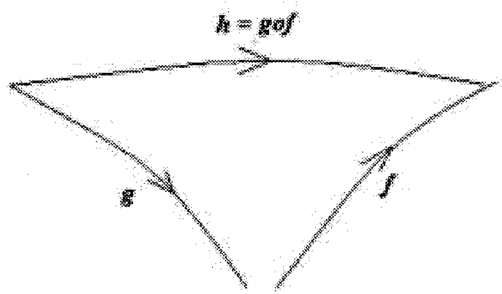
A4

α. Σωστό β.Σωστό γ.Σωστό δ. Λάθος ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$$f:(-\infty,1]\to R, f(x)=(x^2-1)^2 \ , g:[0,+\infty)\to R, g(x)=\sqrt{x}$$

B1



$D_{fog}=\{x\in D_g: g(x)\in D_f\}=\{x\in[0,+\infty): \sqrt{x}\in(-\infty,1]\}=[0,1]$

$(fog)(x)=f(g(x))=(g^2(x)-1)^2=(x-1)^2$

B2

$h(x)=(x-1)^2, x\in[0,1]$

Έστω $x_1,x_2\in[0,1]$ με $h(x_1)=h(x_2)$. Τότε $(x_1-1)^2=(x_2-1)^2\Rightarrow |x_1-1|=|x_2-1|\Rightarrow 1-x_1=1-x_2\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα η h είναι "$1-1$"

Μας χρειάζεται το σύνολο τιμών της h, το οποίο θα αποτελεί το πεδίο ορισμού της h^{-1} και το οποίο μπορεί να προκύψει με τουλάχιστον δύο τρόπους. Διαλέγουμε τον πιο συντηρητικό ...

Το σύνολο τιμών R_h της h, θα αποτελείται από όλους τους πραγματικούς $y\geq 0$, για τους οποίους η ως προς x εξίσωση $y=(x-1)^2$ (1), έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x\in[0,1]$. $(1)\Leftrightarrow \sqrt{y}=|x-1|\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$

Πρέπει και αρκεί $1-\sqrt{y}\in[0,1]\Leftrightarrow 0\leq y\leq 1$. *Άρα* $R_h=[0,1]$.

Ένας δεύτερος τρόπος θα είναι με το Θ. Συνόλου Τιμών.

Η $h(x)$ είναι συνεχής και επειδή $h'(x)=2(x-1)<0$, για κάθε $x\in(0,1)$, η $h(x)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

Άρα το σύνολο τιμών R_h της h θα είναι $R_h=[h(1)-h(0)]=[0,1]$

Επομένως η h αντιστρέφεται στη συνάρτηση $h^{-1}:[0,1]\to[0,1]$ με τύπο

$$h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} \ , & 0\leq x<1\\ \dfrac{1}{2} \ , & x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \ , & 0\leq x<1\\ \dfrac{1}{2} \ , & x=1\end{cases}$$

i) Η φ ως προς τη συνέχεια στο $[0,1)$ συμπεριφέρεται όπως ο πάνω κλάδος της.

Ο κλάδος αυτός είναι συνεχής στο $[0,1)$, *ως λόγος συνεχών συναρτήσεων με μη μηδενιζόμενο παρονομαστή. Άρα η* φ *είναι συνεχής στο* $[0,1)$.

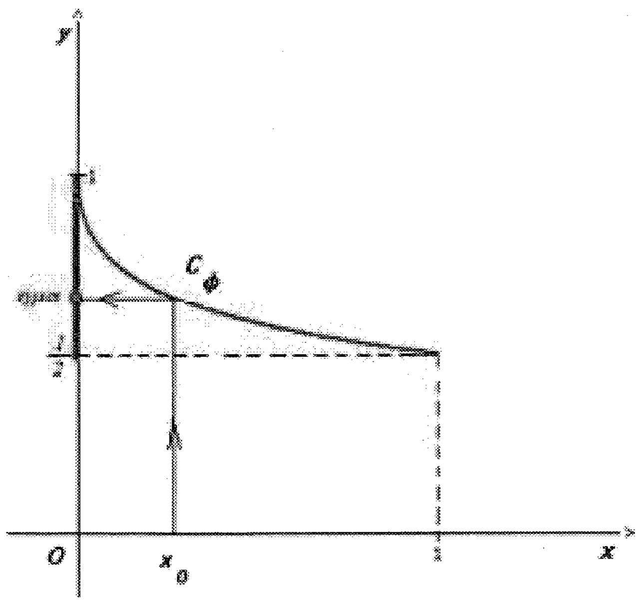
Απομένει η εξέταση της συνέχειας στο $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

Άρα η φ *είναι συνεχής και στο σημείο* $x = 1$, *επομένως είναι συνεχής στο* $[0,1]$.

Επίσης $\varphi(0) = 1 \neq \frac{1}{2} = \varphi(1)$

Επομένως πληρούνται οι προϋποθέσεις του ΘΕΤ για την φ *στο* $[0,1]$.



ii) Επειδή $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, *έπεται ότι* $\frac{1}{2} < ημα < 1 \Rightarrow \varphi(1) < ημα < \varphi(0)$

Επειδή η φ *κατέχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής, θα υπάρχει* $x_0 \in (0,1)$ *τέτοιο ώστε* $\varphi(x_0) = ημα$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Η f *είναι συνεχής στο* $(-\infty,-1]$ *και παραγωγίσιμη στο* $(-\infty,-1)$

$f'(x) = -2$, *για κάθε* $x \in (-\infty,-1) \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)' \Leftrightarrow$

$f(x) = -2x + c_1$, *για κάθε* $x \in (-\infty,-1]$

Η f *είναι συνεχής στο* $[-1,+\infty)$ *και παραγωγίσιμη στο* $(-1,+\infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 1$, *για κάθε* $x \in (-1,+\infty) \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - x)' \Leftrightarrow$

$f(x) = x^3 - x + c$, *για κάθε* $x \in [-1,+\infty)$ *και επειδή* $f(0) = 0, c = 0$, *άρα*

$f(x) = x^3 - x$, *για κάθε* $x \in [-1,+\infty)$

Επομένως $f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & -1 \leq x \end{cases}$

Λόγω συνεχείας της f, $2 + c_1 = -1 + 1, c_1 = -2$

$$\text{Τελικά } f(x)=\begin{cases}-2x-2\,, x\leq -1\\ x^3-x\,, -1<x\end{cases}$$

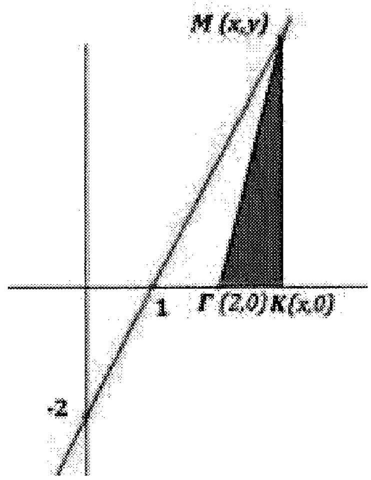
Γ2

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-({x_0}^3-x_0)=(3{x_0}^2-1)(x-x_0) \Leftrightarrow$
$y=(3{x_0}^2-1)x-2{x_0}^3$

Επειδή όμως $(0,-2)\in\varepsilon$, *έπεται, ότι* $-2=-2{x_0}^3 \Leftrightarrow x_0=1$

Άρα $y=2x-2$

Γ3



Την χρονική στιγμή t_0, $\quad \dfrac{dx}{dt}=2\ \mu o\nu/\delta\varepsilon\upsilon\tau$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d(\frac{1}{2}(x-2)y)}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d[(x-2)(2x-2)]}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d(2x^2-6x+4)}{dt}$$
$$=\frac{d(x^2-3x+2)}{dt}=2x\frac{dx}{dt}-3\frac{dx}{dt}=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2$$
$$=6\tau\varepsilon\tau\rho.\,\mu o\nu/\delta\varepsilon\upsilon\tau$$

Γ4

Εστιάζουμε την προσοχή μας στον δεύτερο προσθετέο $\dfrac{f(-x)}{1-x^3}$

Καταρχήν του $x\to-\infty$, *μπορούμε να θεωρήσουμε, ότι* $x<-1$

Τότε $-x>1$, *οπότε* $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x$

Άρα $\dfrac{f(-x)}{1-x^3}=\dfrac{-x^3+x}{1-x^3}\to 1$, *του* $x\to-\infty$

Συγκεντρώνουμε τώρα την προσοχή μας στον πρώτο προσθετέο $\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

Παρατηρούμε, ότι :

Του $x\to-\infty$, $\quad f(x)=-2x-2\to+\infty$, *άρα* $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$,

οπότε $\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=\eta\mu f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}\to 0$, *ως γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη*

Αλλά και συντηρητικότερα ... του $x\to-\infty$

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2}\right| = \left|\frac{\eta\mu(2x+2)}{2x+2}\right| = \frac{|\eta\mu(2x+2)|}{|2x+2|} \leq \frac{1}{|2x+2|} = \frac{1}{(+\infty)}$$
$$= 0$$

Άρα από το $\Theta.$ Κιβωτισμού $\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \to 0$, πάντοτε του $x \to -\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right] = 0 + 1 = 1$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = x - lnx - ln3\,, x > 0$$

Δ₁

i) Η f *είναι συνεχής στο* $(0,+\infty)$, *παραγωγίσιμη στο* $(0,+\infty,)$ *με*

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, \text{για κάθε } x \in (0,+\infty)$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ *και* $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Άρα f *γνησίως αύξουσα στο* $[1,+\infty)$ *και γνησίως φθίνουσα στο* $(0,1]$

Για $x = 1$ *η* f *έχει ολικό ελάχιστο* $f_{min} = f(1) = 1 - ln3 = ln\frac{e}{3} < 0$

Η f *είναι συνεχής στα διαστήματα* $(0,1]$ *και* $[1,+\infty)$ (0)

$\lim\limits_{x\to0+} f(x) = -(-\infty) = +\infty$ (1)

$f(1) = ln\frac{e}{3} < 0$ (2)

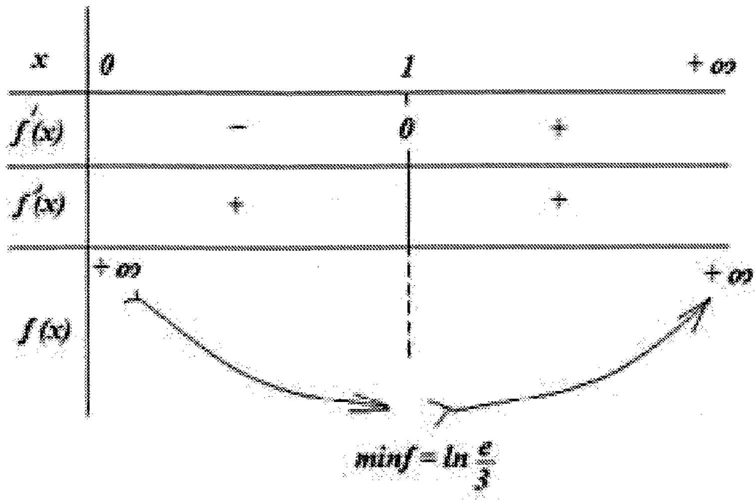
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{lnx}{x} - \dfrac{ln3}{x}\right) = (+\infty)(1-0-0) = +\infty$ (3)

Από τις (0), (1) και (2), λόγω του Θεωρήματος του Bolzano η $f(x)$ *θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα* x_1 *στο* $(0,1)$, *η οποία μάλιστα θα είναι και μοναδική, διότι η* f *είναι γνησίως φθίνουσα στο* $(0,1]$. *Επίσης από τις (0), (2) και (3), λόγω του Θεωρήματος του Bolzano η* $f(x)$ *θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα* x_2 *στο* $(1,+\infty)$, *η οποία μάλιστα θα είναι και μοναδική, διότι η* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* $(1,+\infty)$

ii) $f''(x) = \dfrac{x-(x-1)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} > 0$, *για κάθε* $x \in (0,+\infty)$

Άρα η f *είναι (γνήσια) κυρτή στο* $(0,+\infty)$

Είναι χρήσιμο να δούμε και τον πίνακα μεταβολών

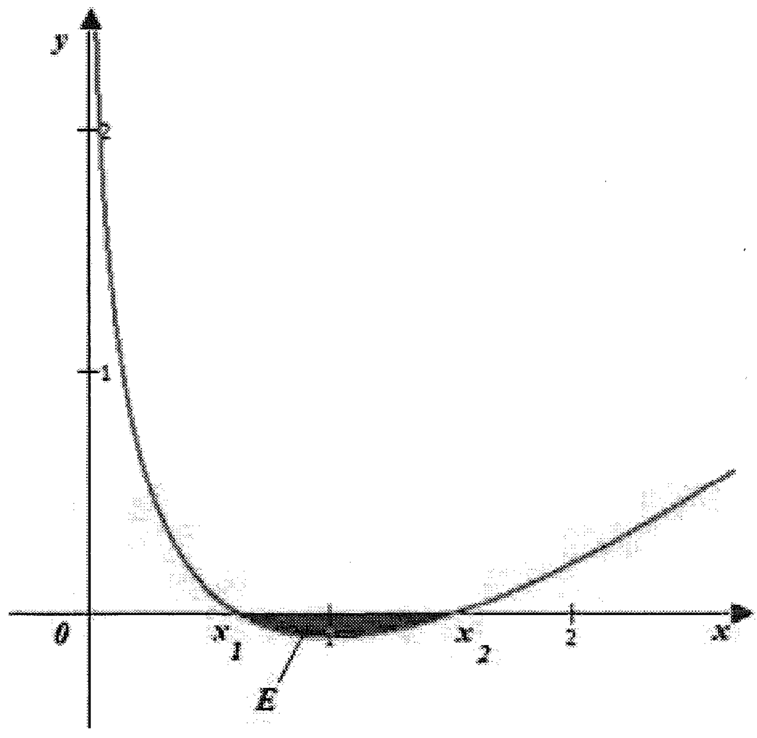


Δ_2

$x_1 < x \le 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x) \Rightarrow f(x) < 0$

$1 \le x < x_2 \Rightarrow f(x) < f(x_2) \Rightarrow f(x) < 0$

Άρα για κάθε $x \in (x_1, x_2) : f(x) < 0$



$$E = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} (x - lnx - ln3\,)dx = -\int_{x_1}^{x_2} xdx + \int_{x_1}^{x_2} lnxdx + ln3\int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$= -\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + x_2 lnx_2 - x_2 - x_1 lnx_1 + x_1 + (x_2 - x_1)ln3$$

Αλλά $f(x_1) = 0 \Rightarrow lnx_1 = x_1 - ln3 \Rightarrow x_1 lnx_1 = x_1^2 - x_1 ln3$

Όμοια $x_2 lnx_2 = x_2^2 - x_2 ln3$

Άρα $x_2 lnx_2 - x_1 lnx_1 = x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1)ln3$

Άρα $E = -\dfrac{x_2^2 - x_1^2}{2} + x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) = \dfrac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$

***Δ*₃**

Επειδή για κάθε $x \in (x_1, x_2) : f(x) < 0,$ *αρκεί να αποδείξουμε ότι*

$$x_1 < 2 - x_1 < x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 < 1 \ \text{και}\ x_1 + x_2 - 2 > 0$$

Αλλά $x_1 < 1$ *και από τον τύπο του εμβαδού* $x_1 + x_2 - 2 > 0$ *ό.έ.δ.*

***Δ*₄**

Επειδή η f *είναι (γνήσια)κυρτή, η εφαπτομενή της* t *στο σημείο* $M(x_2, 0)$ *θα αφήνει την* C_f *πάνω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής* $M(x_2, 0)$ *(Βλέπε Θ.2.4.1 , σελ. 277, Τεύχος 2, Μαθηματικά Γ Λυκείου, Θ. Χαρμούση)*

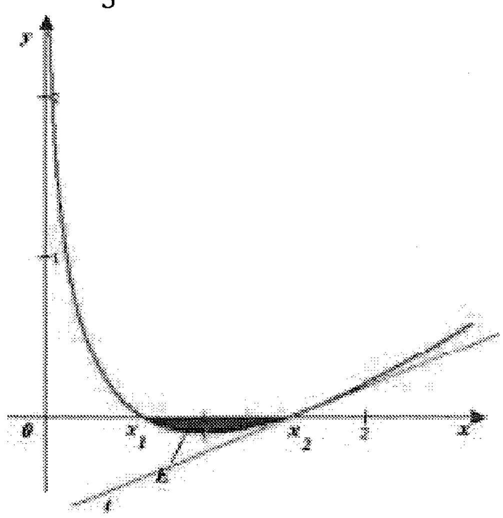
Η t *θα έχει εξίσωση* $y = f'(x_2)(x - x_2)$

Άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ (4) *και το ίσον θα ισχύει μόνον όταν* $x = x_2$

Επίσης $f(x) \geq ln\dfrac{e}{3}$ (5) *και το ίσον ισχύει μόνον όταν* $x = 1$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) *και* (5) *προκύπτει η καθαρή ανισότητα*

$2f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + ln\dfrac{e}{3} \Rightarrow 2f(x) + ln3 > 1 + f'(x_2)(x - x_2)$



Άρα η εξίσωση $2f(x) + ln3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ *δεν έχει λύση.*