ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΙΟΥ 2013

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.335

Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.246

Α3. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.222

Α4. **α)** Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow (z-2)(\overline{z-2})+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(|z-2|+2\right)\left(|z-2|-1\right)=0 \Leftrightarrow |z-2|=1,$ αφού $|z-2|+2>0$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

$|z|=|(z-2)+2|\leq|z-2|+2=3$

Β2. Η εξίσωση $w^2+\beta w+\gamma=0$,$\beta,\gamma\in R$ έχει αρνητική διακρίνουσα, αφού αν ήταν $\Delta\geq0$ θα είχε ρίζες z_1,z_2 πραγματικές και άρα $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=|0-0|=0$, άτοπο.

Έτσι οι ρίζες της εξίσωσης είναι συζυγείς μη πραγματικοί αριθμοί.

Έστω $z_1=\alpha+\delta i$, $\alpha,\delta\in R$, οπότε $z_2=\alpha-\delta i$

Τότε $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |\delta-(-\delta)|=2 \Leftrightarrow |2\delta|=2 \Leftrightarrow |\delta|=1 \Leftrightarrow \delta=1$ ή $\delta=-1$

Οι εικόνες των z_1, z_2 ανήκουν στον κύκλο C με εξίσωση $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$ και έτσι

προκύπτει $(\alpha-2)^2 + \delta^2 = 1 \overset{|\delta|=1}{\Leftrightarrow} (\alpha-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Άρα $z_1 = 2+i$ και $z_2 = 2-i$

Από τους τύπους Vieta έχουμε: $z_1 + z_2 = -\beta \Rightarrow 4 = -\beta \Rightarrow \beta = -4$ και $z_1 z_2 = \gamma \Rightarrow \gamma = 5$.

Β3. Α΄ τρόπος

Είναι $v \neq 0$, αφού αν ήταν $v = 0$, τότε θα προέκυπτε $\alpha_0 = 0$ και άρα $|\alpha_0 - 2| = 2$, άτοπο,

αφού $|\alpha_0 - 2| = 1$. Έτσι έχουμε:

$$1 + \frac{\alpha_2}{v} + \frac{\alpha_1}{v^2} + \frac{\alpha_0}{v^3} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{v} + \frac{\alpha_1}{v^2} + \frac{\alpha_0}{v^3} = -1 \Rightarrow \left|\frac{\alpha_2}{v} + \frac{\alpha_1}{v^2} + \frac{\alpha_0}{v^3}\right| = 1$$

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας έχουμε

$$\left|\frac{\alpha_2}{v} + \frac{\alpha_1}{v^2} + \frac{\alpha_0}{v^3}\right| \le \frac{|\alpha_2|}{|v|} + \frac{|\alpha_1|}{|v|^2} + \frac{|\alpha_0|}{|v|^3} \Rightarrow 1 \le \frac{|\alpha_2|}{|v|} + \frac{|\alpha_1|}{|v|^2} + \frac{|\alpha_0|}{|v|^3} \quad (1)$$

Αν ήταν $|v| \ge 4$, τότε $\frac{1}{|v|} \le \frac{1}{4}$ και επειδή λόγω του Β1 ερωτήματος είναι

$|\alpha_2| \le 3$, $|\alpha_1| \le 3$ και $|\alpha_0| \le 3$ προκύπτει $\frac{|\alpha_2|}{|v|} \le \frac{3}{4}$, $\frac{|\alpha_1|}{|v|^2} \le \frac{3}{16}$, $\frac{|\alpha_0|}{|v|^3} \le \frac{3}{64}$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις τελευταίες ανισότητες προκύπτει $\frac{|\alpha_2|}{|v|} + \frac{|\alpha_1|}{|v|^2} + \frac{|\alpha_0|}{|v|^3} \le \frac{63}{64}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $1 \le \frac{63}{64}$, άτοπο.

Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί κακώς υποθέσαμε ότι $|v| \ge 4$. Άρα ισχύει $|v| < 4$.

Β΄ τρόπος

Είναι $v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0 \Rightarrow |v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \le |\alpha_2||v|^2 + |\alpha_1||v| + |\alpha_0|$.

Επειδή $|\alpha_0| \le 3$, $|\alpha_1| \le 3$ και $|\alpha_2| \le 3$ προκύπτει

$$|v|^3 \le 3|v|^2 + 3|v| + 3 < 3|v|^2 + 3|v| + 4 \Rightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 4 < 0$$

$\Rightarrow (|v| - 4)(|v|^2 + |v| + 1) < 0 \Rightarrow |v| < 4$, αφού $|v|^2 + |v| + 1 > 0$ ως τιμή του τριωνύμου

$P(x) = x^2 + x + 1$, $x \in R$ που έχει $\Delta < 0$ και άρα $P(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

Γ΄ τρόπος

Είναι $|\alpha_2| \le 3 \Rightarrow -|\alpha_2| \ge -3$ (1) , λόγω του Β.1 ερωτήματος.

Έστω $|v| \ge 4$ (2).

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει $|v| - |\alpha_2| \ge 1 \Rightarrow \big||v| - |\alpha_2|\big| \ge 1$

$\Rightarrow |v|^2 \big||v| - |\alpha_2|\big| \ge |v|^2$ (3)

Είναι $v^3 + \alpha_2 v^2 = -\alpha_1 v - \alpha_0 \Rightarrow |v^2(v+\alpha_2)| = |\alpha_1 v + \alpha_0| \Rightarrow |v|^2 |v+\alpha_2| = |\alpha_1 v + \alpha_0|$.

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$|\alpha_1 v + \alpha_0| \le |\alpha_1||v| + |\alpha_0| \le 3|v| + 3$, αφού $|\alpha_1| \le 3$ και $|\alpha_0| \le 3$.

$|v^2(v+\alpha_2)| \ge |v|^2 \big||v| - |\alpha_2|\big| \ge |v|^2$, λόγω της (3).

Άρα $|v|^2 \le |v^2(v+\alpha_2)| = |\alpha_1 v + \alpha_0| \le 3|v| + 3$ και άρα $|v|^2 - 3|v| - 3 \le 0 \Rightarrow 0 \le |v| \le \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Όμως $\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} < 4$ και άρα $|v| < 4$, άτοπο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in R$ είναι $(f(x)+x)(f'(x)+1) = x \Leftrightarrow (f(x)+x)(f(x)+x)' = x \Leftrightarrow$

$2(f(x)+x)(f(x)+x)' = 2x \Leftrightarrow ((f(x)+x)^2)' = (x^2)'$

Άρα υπάρχει $c \in R$ τέτοια ώστε $(f(x)+x)^2 = x^2 + c$ για κάθε $x \in R$.

Για $x = 0$ έχουμε: $1 = c$. Άρα για κάθε $x \in R$ είναι $(f(x)+x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow |f(x)+x| = \sqrt{x^2+1}$

Θεωρώ $h(x) = f(x) + x$, $x \in R$.

Η h είναι συνεχής στο R ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (f συνεχής ως παραγωγίσιμη).

Έστω ότι υπάρχει $x_1 \in R$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$. Τότε $\sqrt{x_1^2 + 1} = 0 \Rightarrow x_1^2 = -1$, άτοπο.

Άρα $h(x) \ne 0$ για κάθε $x \in R$ και άρα η $h(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

Επειδή $h(0) = f(0) = 1 > 0$ προκύπτει $h(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

Άρα για κάθε $x \in R$, $f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

Γ2. Είναι $D_{fog} = R$ και άρα η εξίσωση ορίζεται στο R.

Για κάθε $x \in R$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$, αφού $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ και άρα

$\sqrt{x^2+1} > x$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R και άρα 1-1.

Έτσι η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0$

Για κάθε $x \in R$, $g'(x) = 3x^2 + 3x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 0$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗		↘		↗

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1)$ και άρα

$g((-\infty,-1)) = (\lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to-1^-} g(x)) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, αφού $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$0 \notin g((-\infty,-1))$ και άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(-\infty,-1)$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$ και άρα

$g([-1,0]) = [g(0), g(-1)] = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$

$0 \notin g([-1,0])$ και άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $[-1,0]$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και άρα

$g((0,+\infty)) = (\lim_{x\to0^+} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)) = (-1,+\infty)$, αφού $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$0 \in g((0,+\infty))$ και άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,+\infty)$, που είναι και μοναδική, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Έτσι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία ακριβώς λύση, το ίδιο και η ισοδύναμή της αρχική εξίσωση.

Γ3. Α΄ τρόπος

Θεωρώ $\kappa(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x+\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Η f είναι συνεχής στο R, άρα η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και συνεχής.

Έτσι η $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ είναι συνεχής στο R ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x-\frac{\pi}{4}$ και $\int_0^x f(t)dt$.

Έτσι η κ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

$\kappa\left(\frac{\pi}{4}\right)=f(0)\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}+\int_0^0 f(t)dt=1>0$

$\kappa(0)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi 0+\int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)dt=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt.$

Δείξαμε ότι $\sqrt{x^2+1}>x$ για κάθε $x\in R$, δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και άρα για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$.

Έτσι $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x)dx>0\Rightarrow\kappa(0)<0$

Άρα $\kappa(0)\kappa\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$ και σύμφωνα με το Θ.Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $\kappa(x_0)=0\Leftrightarrow f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0=\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt.$

Β΄ τρόπος

Θεωρώ $\varphi(x)=\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\cdot\eta\mu x$ στο R.

Η f είναι συνεχής στο R, άρα η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R και άρα η $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x-\frac{\pi}{4}$ και $\int_0^x f(t)dt$.

Άρα η φ είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων , άρα και συνεχής.

$$\varphi(0)=\int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\cdot 0=0$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^0 f(t)dt\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

Η φ είναι συνεχής στο $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(0\,,\,\frac{\pi}{4}\right)$ με

$$\varphi'(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x+\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\cdot\sigma\upsilon\nu x \quad \text{και} \quad \varphi(0)=\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Έτσι σύμφωνα με το Θ.Rolle υπάρχει $x_0\in\left(0\,,\,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(x_0)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x_0+\int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\cdot\sigma\upsilon\nu x_0=0 \overset{\sigma\upsilon\nu x_0>0}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0+\int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt=0$$

$$\Leftrightarrow f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0=\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt\,.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, άρα και στο 1. Άρα $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Έτσι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}\underset{u_0=1}{\overset{u=1+5h}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\left(\frac{f(u)-f(1)}{u-1}\cdot 5\right)=5f'(1)$

Επίσης $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\underset{u_0=1}{\overset{u=1-h}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u)-f(1)}{-(u-1)}=-f'(1)$

Έτσι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right)=0\Rightarrow 5f'(1)+f'(1)=0\Rightarrow$

$6f'(1)=0\Rightarrow f'(1)=0$

Για $0<x<1\overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$

$x>1\overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$

	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

Έτσι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1.

Δ2. Η $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ και άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$, άρα και συνεχής.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$, $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}>0$ αφού $x>1 \underset{[1,+\infty)}{\overset{f \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow}} f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>1$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

Θεωρώ $\kappa(x)=\int_x^{x+1} g(u)du$ στο $(1,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$, $\kappa(x)=\int_2^{x+1} g(u)du-\int_2^{x} g(u)du$

Η g είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$, άρα η $\int_2^{x} g(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$.

Η $\int_2^{x+1} g(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x+1$ και $\int_2^{x} g(u)du$. Έτσι η κ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$, άρα και συνεχής.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$, $\kappa'(x)=g(x+1)-g(x)>0$, αφού $x+1>x$ και η g είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η κ είναι γνησίως αύξουσα.

Η ανίσωση γράφεται $\kappa(8x^2+5)>\kappa(2x^4+5)\Leftrightarrow 8x^2+5>2x^4+5\Leftrightarrow 4x^2>x^4\Leftrightarrow x^4-4x^2<0\Leftrightarrow$ $x^2(x^2-4)<0\Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(0,2)$.

Δ3. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$, $g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-f(1))}{(x-1)^2}$.

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[1,x]$ για κάθε $x>1$ ως παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Έτσι προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\xi<x \overset{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(x)\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(x)\Rightarrow \overset{x>1}{\Rightarrow} f(x)-f(1)<f'(x)(x-1)$

Άρα $g''(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και άρα η g είναι κυρτή συνάρτηση.

Α΄ τρόπος

Η εφαπτομένη της C_g στο $A(\alpha, g(\alpha))$ έχει εξίσωση

$\varepsilon: y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y = g'(\alpha)(x-\alpha)$, αφού $g(\alpha)=0$.

Η g είναι κυρτή και άρα η C_g βρίσκεται πάνω από την ε με εξαίρεση το σημείο Α.

Δηλαδή για κάθε $x \in (1,+\infty)$ ισχύει $g(x) \geq g'(\alpha)(x-\alpha)$ με το ίσον να ισχύει για $x=\alpha$ μόνο.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\alpha-1)g(x) = (f(\alpha)-1)(x-\alpha) \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha) \Leftrightarrow g(x) = g'(\alpha)(x-\alpha).$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση το α.

Β΄ τρόπος

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα το $\alpha > 1$.

Θεωρώ $m(x) = (\alpha-1)\int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}dt - (f(\alpha)-1)(x-\alpha)$ στο $(1,+\infty)$.

Η m είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $m'(x) = (\alpha-1)\frac{f(x)-1}{x-1} - (f(\alpha)-1) = (\alpha-1)g'(x) - (f(\alpha)-1)$.

Είναι $m'(\alpha)=0$.

Για κάθε $x \in (1,+\infty)$, $m''(x) = (\alpha-1)g''(x) > 0$, αφού $\alpha > 1$ και $g''(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.

Άρα η m' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Για $1 < x < \alpha \Rightarrow m'(x) < m'(\alpha) \Rightarrow m'(x) < 0$.

Για $x > \alpha \Rightarrow m'(x) > m'(\alpha) \Rightarrow m'(x) > 0$.

Άρα η m είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,\alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$.

Για $1 < x < \alpha \Rightarrow m(x) > m(\alpha) \Rightarrow m(x) > 0$.

Για $x > \alpha \Rightarrow m(x) > m(\alpha) \Rightarrow m(x) > 0$.

Άρα $m(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,\alpha) \cup (\alpha,+\infty)$.

Έτσι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $m(x)=0$ είναι το α.