ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.28

Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.14

Α3. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.87

Α4. **α)** Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x(x^2+x)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$

$= -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-1)(\sqrt{1}+1)} = \frac{1}{4}$

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{3}(x\ln x)' = \frac{1}{3}[(x)'\ln x + x(\ln x)'] = \frac{1}{3}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}(\ln x + 1)$

Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν $x=1$ είναι ίσος με $f'(1) = \frac{1}{3}$

Άρα $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

B2. $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

Είναι $A' \subseteq \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} \Rightarrow P(A') \le P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) \Rightarrow P(A') \le 1 - P(\omega_1) \Rightarrow P(A') \le \frac{3}{4}$

Είναι $\{\omega_3\} \subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3) \le P(A') \Rightarrow \frac{1}{3} \le P(A')$

Άρα $\frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4}$

B3. $P(A') = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$

Από τον αξιωματικό ορισμό έχουμε:

$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + P(\omega_4) = 1 \Rightarrow P(\omega_4) = 0$

Είναι $A - B = \{\omega_4\}$, $B - A = \{\omega_3\}$, $(A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3, \omega_4\}$ και άρα

$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$, $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$, $A' - B' = \{\omega_3\}$ και άρα $P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

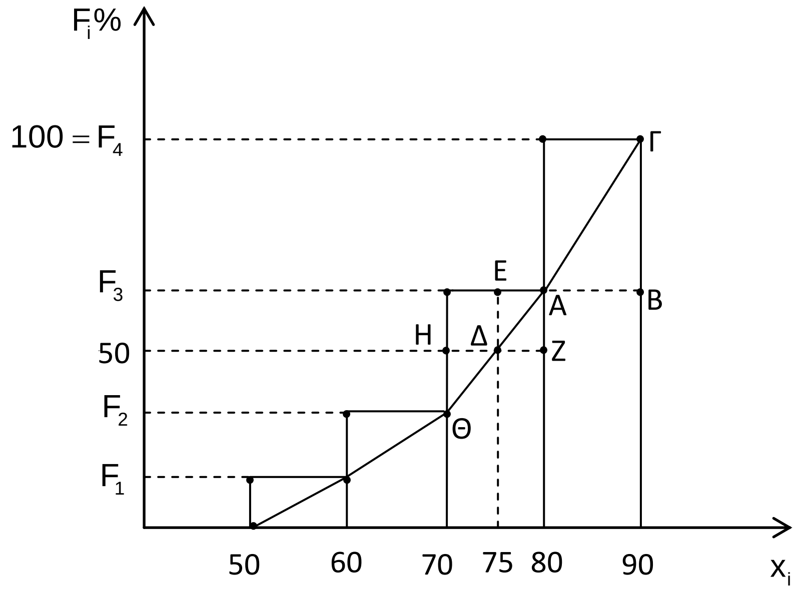
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η μικρότερη παρατήρηση είναι ίση με 50, τότε τα άκρα της $4^{ης}$ κλάσης είναι

$50 + 3c$ και $50 + 4c$. Άρα $\frac{(50 + 3c) + (50 + 4c)}{2} = 85$, δηλαδή $c = 10$

Γ2.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετική συχνότητα f_i
$[50,60)$	55	0,1
$[60,70)$	65	0,3
$[70,80)$	75	0,2
$[80,90)$	85	0,4
Σύνολο		1



Είναι $\varepsilon\varphi \mathrm{H}\hat{\Delta}\Theta = \varepsilon\varphi \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} \Rightarrow \frac{\mathrm{H\Theta}}{\mathrm{H\Delta}} = \frac{\mathrm{AZ}}{\Delta\mathrm{Z}} \Rightarrow \frac{\mathrm{H\Theta}}{5} = \frac{\mathrm{AZ}}{5} \Rightarrow \mathrm{H\Theta} = \mathrm{AZ}$.

Επίσης $\mathrm{H\Theta} + \mathrm{AZ} = F_3 - F_2 \Rightarrow 2\mathrm{H\Theta} = f_3 \Rightarrow \mathrm{H\Theta} = \frac{f_3}{2}$.

Επειδή η διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα είναι η τιμή από την οποία είναι μικρότερες ή ίσες οι μισές παρατηρήσεις προκύπτει ότι $f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = 0{,}5$ (1).

Επίσης είναι $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$ (2).

Από τις (1) και (2) $\frac{f_3}{2} + f_4 = 0{,}5 \overset{f_4 = 2f_3}{\Rightarrow} \frac{f_3}{2} + 2f_3 = 0{,}5 \Rightarrow f_3 = 0{,}2$ και άρα $f_4 = 0{,}4$.

$\bar{x} = 74 \Leftrightarrow x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 = 74 \Leftrightarrow 55 \cdot f_1 + 65f_2 + 75 \cdot 0{,}2 + 85 \cdot 0{,}4 = 74$

$\Leftrightarrow 55f_1 + 65(0{,}4 - f_1) + 15 + 34 = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 26 - 65f_1 = 25 \Leftrightarrow -10f_1 = -1 \Leftrightarrow f_1 = 0{,}1.$

Άρα $f_2 = 0{,}4 - f_1 \Rightarrow f_2 = 0{,}3$.

Γ3. $f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}6$

Οι σχετικές συχνότητες των κλάσεων του δείγματος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 είναι $f'_1 = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6}$ $\quad f'_2 = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{3}{6}$ $\quad f'_3 = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{2}{6}$

Η μέση τιμή των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ίση με

$$\bar{x} = 55 \cdot \frac{1}{6} + 65 \cdot \frac{3}{6} + 55 \cdot \frac{1}{6} + 75 \cdot \frac{2}{6} = \frac{55}{6} + \frac{195}{6} + \frac{150}{6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$$

Γ4. Στην κανονική κατανομή το $\frac{100\%-95\%}{2}=2{,}5\%$ των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες

από $\bar{x}+2s$. Άρα $\bar{x}+2s=74$ (3)

Στην κανονική κατανομή το $\frac{100\%-68\%}{2}=16\%$ των παρατηρήσεων είναι μικρότερες

του $\bar{x}-s=68$. Άρα $\bar{x}-s=68$ (4)

Από τις (1) και (2) προκύπτει $s=2$ και $\bar{x}=70$

$CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{70}=2{,}86\%\leq 10\%$, άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=x\ln x+\kappa,\ x>0$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=\left(x\ln x+\kappa\right)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'+(\kappa)'=\ln x+x\frac{1}{x}+0=\ln x+1$

Η ε θα έχει εξίσωση $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$

$\lambda=f'(1)=1$ και άρα $\varepsilon: y=x+\beta$

Το σημείο $(1,f(1))$ ανήκει στην ε και έτσι προκύπτει $f(1)=1+\beta\Leftrightarrow\kappa=1+\beta\Leftrightarrow\beta=\kappa-1$

Άρα $\varepsilon: y=x+\kappa-1$

Η ε τέμνει του άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $X(1-\kappa,0)$ και $Y(0,\kappa-1)$ αντίστοιχα.

Έτσι $E=\frac{1}{2}|1-\kappa||\kappa-1|=\frac{1}{2}|\kappa-1|^2=\frac{1}{2}(\kappa-1)^2$

Είναι $E<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\kappa-1)^2<2\Leftrightarrow(\kappa-1)^2<4\Leftrightarrow|\kappa-1|<2\Leftrightarrow-2<\kappa-1<2\Leftrightarrow-1<\kappa<3$

Όμως $\kappa\in Z$ με $\kappa>1$ και άρα $\kappa=2$

Άρα $\varepsilon: y=x+1$

Δ2. α) Οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της ε και άρα ισχύει

$y_i=x_i+1,\ i=1,...,50$. Άρα οι τεταγμένες προκύπτουν από τις τετμημένες προσθέτοντας τη

σταθερά 1. Άρα $\bar{y}=\bar{x}+1\Leftrightarrow 31=\bar{x}+1\Leftrightarrow\bar{x}=30$

β) $\bar{x} = 30 \Leftrightarrow \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_{50}}{50} = 30 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{50} = 1500$

Έστω $\bar{x}' = 31$ η νέα μέση τιμή. Τότε

$$\bar{x}' = \frac{(x_1+3)+...+(x_{20}+3)+...+x_{21}+...+x_{35}+(x_{36}-\lambda)+...+(x_{50}-\lambda)}{50} \Leftrightarrow$$

$$31 = \frac{x_1+x_2+...+x_{50}+20\cdot 3-15\cdot\lambda}{50} \Leftrightarrow 1550 = 1500+60-15\lambda \Leftrightarrow -10 = -15\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{e}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{e}$

	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

$\dfrac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e \underset{\left[\frac{1}{e},+\infty\right)}{\overset{f\ \text{γν.αυξ.}}{\Longrightarrow}} f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$

Η f έχει ελάχιστο το $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 2 - \dfrac{1}{e} > 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

$f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$

Έτσι $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$

Άρα $R = f(e) - f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = e\ln e + 2 - 0 = e + 2$

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με:

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}=\frac{\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e+2+0}{5}$$

Είναι $\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}=e^{7}\Leftrightarrow\ln(\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma})=\ln e^{7}\Leftrightarrow\ln\alpha^{\alpha}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}=7\Leftrightarrow$

$\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma=7$

Έτσι η παραπάνω μέση τιμή είναι ίση με $\frac{7+6+e+2}{5}=\frac{15+e}{5}$

Δ4. α) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(t,f(t))$ θα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία αν και μόνο αν έχει θετικό συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή αν και μόνο αν $f'(t)>0$.

Δείξαμε ότι για κάθε $t\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ είναι $f'(t)>0$ και άρα $A=\{t_{11},t_{12},...,t_{30}\}$

$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

β) Στο $(0,1)$ έχουμε

$f(t)>f'(t)+1\Leftrightarrow t\ln t+2>\ln t+1+1\Leftrightarrow t\ln t>\ln t\overset{\ln t<0}{\Leftrightarrow}0<t<1$

Άρα $B=\{t_1,t_2,...,t_{29}\}$

Είναι $A\cap B=\{t_{11},t_{12},...,t_{29}\}$ και άρα $P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}$