ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

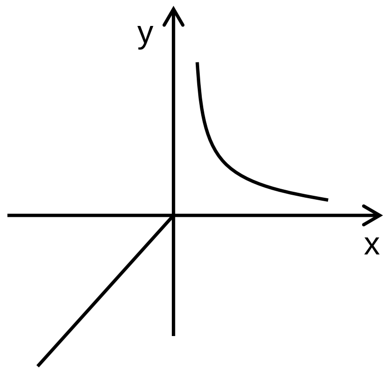
<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο.

Α2. α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\,, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}\,, & x>0 \end{cases}$ είναι $1-1$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη, αφού στο $(-\infty,0]$ είναι γνησίως αύξουσα και στο $(0,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

<u>Εναλλακτικά</u>



Η συνάρτηση είναι $1-1$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη, αφού στο $(-\infty,0]$ είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Α3. Βλέπε σχολικό βιβλίο.

Α4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστή

δ) Σωστή

ε) Σωστή

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

$f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$ $\qquad D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Β1. Η f είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=(-2)^3 \Leftrightarrow x=-2$.

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}>0 \underset{\text{για κάθε } x\in R}{\overset{x^2-2x+4>0}{\Leftrightarrow}} \frac{x+2}{x^3}>0 \Leftrightarrow (x+2)x^3>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty).$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$. Στη θέση -2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$.

Β2. Για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $f''(x)=-\dfrac{24}{x^4}<0$.

Άρα η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν παρουσιάζει καμπή.

Β3. Η f είναι συνεχής συνάρτηση.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$.

Άρα ο $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1=\lambda.$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0=\beta.$$

Η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

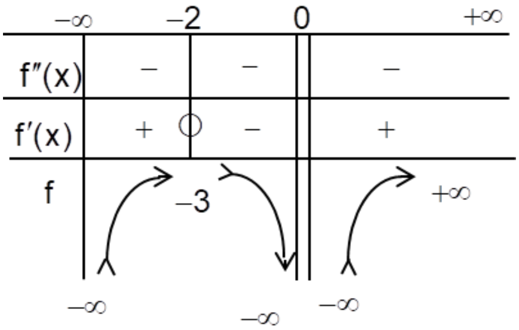
Στο $+\infty$ έχουμε:

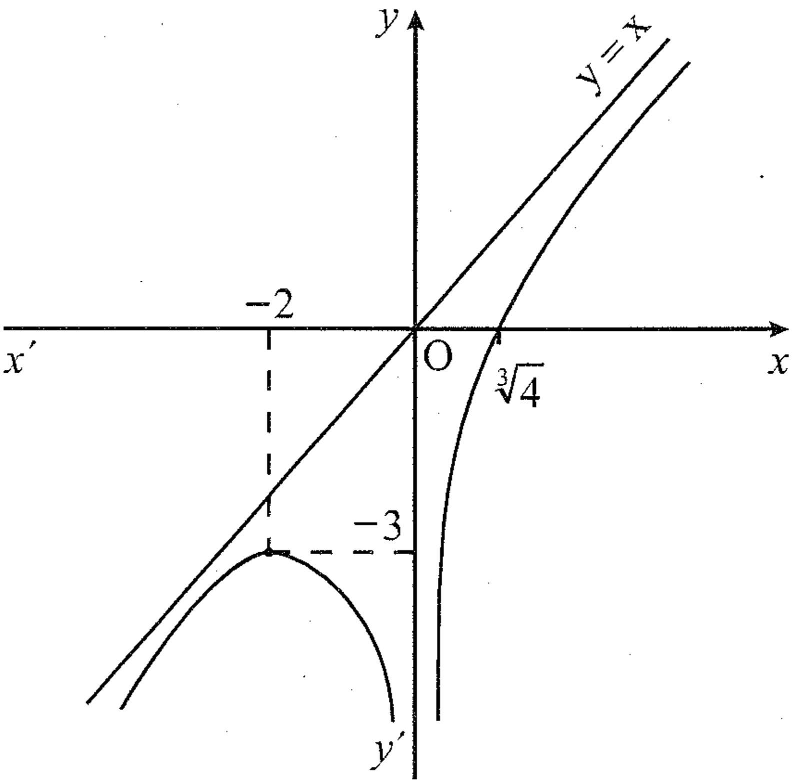
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1=\lambda .$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0=\beta .$$

Η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$.

Β4.





ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το τετράγωνο έχει περίμετρο $x\mathrm{m}$, άρα πλευρά $\frac{x}{4}\mathrm{m}$ και άρα εμβαδόν $\frac{x^2}{16}\mathrm{m}^2$.

Ο κύκλος έχει περίμετρο $(8-x)\mathrm{m}$, άρα ακτίνα $\frac{8-x}{2\pi}\mathrm{m}$ και άρα εμβαδόν

$$\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\frac{(x-8)^2}{4\pi}\mathrm{m}^2.$$

Είναι $x>0$ και $8-x>0 \Leftrightarrow x<8$, αφού οι συναρτήσεις x και $8-x$ εκφράζουν διαστάσεις.

Έτσι το άθροισμα των εμβαδών δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(x-8)^2}{4\pi}=$

$=\frac{\pi x^2+4(x-8)^2}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$ με πεδίο ορισμού το $(0,8)$.

Γ2. Για κάθε $x\in(0,8)$, $E'(x)=\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$.

$E'(x)=0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32=0 \Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$.

$E'(x)>0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32>0 \Leftrightarrow x>\frac{32}{\pi+4}$.

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
E		$\searrow$	$\frac{16}{\pi+4}$	$\nearrow$	

Η $E(x)$ γίνεται ελάχιστη όταν $x=\frac{32}{\pi+4}$. Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι

$\frac{x}{4}=\frac{8}{\pi+4}$ και η διάμετρος του κύκλου $2\frac{8-x}{2\pi}=\frac{8-x}{\pi}=\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8}{\pi+4}$ και άρα είναι

ίση με την πλευρά του τετραγώνου.

Γ3. Θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση.

$$\lim_{x\to 0^+} E(x)=\frac{16}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 8^-} E(x)=4$$

Η E είναι συνεχής στα $\Delta_1=\left(0\,,\frac{32}{\pi+4}\right]$ και $\Delta_2=\left(\frac{32}{\pi+4}\,,8\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 και γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

$$E(\Delta_1)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\ \lim_{x\to 0^-}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4}\,,\frac{16}{\pi}\right).$$

$$E(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to \frac{32}{\pi+4}^+}E(x),\ \lim_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left(\frac{16}{\pi+4}\,,4\right).$$

$5\notin E(\Delta_2)$ και άρα η εξίσωση $E(x)=5$ είναι αδύνατη σ' αυτό.

Είναι $\frac{16}{\pi+4}<5<\frac{16}{\pi}$ και έτσι $5\in E(\Delta_1)$.

Άρα η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο Δ_1, που είναι και μοναδική στο Δ_1, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.

Τελικά η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση στο $(0,8)$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2 \qquad D_f=R \qquad \alpha>1$

Η f είναι συνεχής στο R ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x\in R$, $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$.

Για κάθε $x\in R$, $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}=2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}=e^0 \Leftrightarrow x=\alpha$.

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}>2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}>e^0 \Leftrightarrow x>\alpha$.

Το σημείο καμπής της C_f είναι το $A(\alpha,f(\alpha))$, δηλαδή το $A(\alpha,2-\alpha^2)$.

Δ2. Η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,\alpha]$ και $[\alpha,+\infty)$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,\alpha)$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$.

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$ και μπορεί να έχει μία το πολύ ρίζα σ' αυτό και γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,+\infty)$ και μπορεί να έχει μία το πολύ ρίζα σ' αυτό.

Δηλαδή η f' έχει δύο το πολύ ρίζες στο R.

$f'(0)=2e^{-\alpha}>0$.

$f'(\alpha)=2-2\alpha<0$, αφού $\alpha>1$.

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}(2e^{x-\alpha}-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x\left(\frac{e^{x-\alpha}}{x}-1\right)\right)=+\infty,\ \text{αφού:}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-\alpha}}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^{x-\alpha})'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x-\alpha})=+\infty$.

Άρα η $f'(x)$ είναι θετική "κοντά" στο $+\infty$ και άρα υπάρχει $\kappa>\alpha$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa)>0$.

Έτσι $f'(0)f'(\alpha)<0$ και $f'(\alpha)f'(\kappa)<0$.

Επιπλέον η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,\alpha]$ και $[\alpha,\kappa]$. Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχουν $x_1\in(0,\alpha)$ και $x_2\in(\alpha,\kappa)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$ (προφανώς $x_1<x_2$).

Έτσι η f' έχει δύο μόνο ρίζες τις x_1, x_2.

Η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,x_1)$, (x_1, x_2) και $(x_2,+\infty)$ και δε μηδενίζεται σ' αυτά.

Άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα απ' αυτά.

Είναι $f'(0)>0$, $f'(\alpha)<0$ και $f'(\kappa)>0$.

	$-\infty$	0		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f'(x)$			+	0		−		0	+	

Έτσι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$.

	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

Στη θέση x_1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στη θέση x_2 τοπικό ελάχιστο.

Δ3. Στο (x_1,x_2) η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα $1-1$. Έτσι η εξίσωση γράφεται

$f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1$. Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι το $1\notin(\alpha,x_2)$, αφού $\alpha>1$.

(Είναι $f'(1)=2e^{1-\alpha}-2<0$, αφού $\alpha>1$ και άρα $x_1<1<x_2$ και μάλιστα $x_1<1<\alpha<x_2$).

Δ4. Για $\alpha=2$, $f(x)=2e^{x-2}-x^2$ και $f'(x)=2e^{x-2}-2x$.

Η εφαπτομένη ε της C_f στο $A(2,f(2))$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y+2=-2(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+2$.

Η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$ και έτσι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε, με εξαίρεση το

το σημείο επαφής.

Άρα για κάθε $x\in[2,+\infty)$, $f(x)\geq -2x+2$, με το “=„ να ισχύει μόνο για $x=2$.

Για κάθε $x\in[2,+\infty)$ προκύπτει:

$f(x)\sqrt{x-2}\geq(-2x+2)\sqrt{x-2}$, με το “=„ να ισχύει μόνο για $x=2$.

Έτσι $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx$.

$$\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx \underset{u_1=0 \quad u_2=1}{\overset{u=x-2 \quad du=dx}{=}} \int_0^1(-2u-2)\sqrt{u}du=\int_0^1(-2u\sqrt{u}-2\sqrt{u})du=$$

$$\int_0^1(-2u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}})du=\left[-2\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{32}{15}.$$

Τελικά $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>-\frac{32}{15}$.