ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 262

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 246

Α4. α) Λάθος

β) Σωστή

γ) Λάθος

δ) Σωστή

ε) Σωστή

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in R$, $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με τιμή $f(0) = 0$.

B2. Για κάθε $x \in R$, $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1)^2 - 2x(x^2+1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} = \dfrac{2(x^2+1)^2 - 4x\cdot 2x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

$$= \frac{2(x^2+1)[(x^2+1)-4x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 1-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ή} \quad x>\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$		$-$	
f		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ και $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$

και κυρτή στο $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

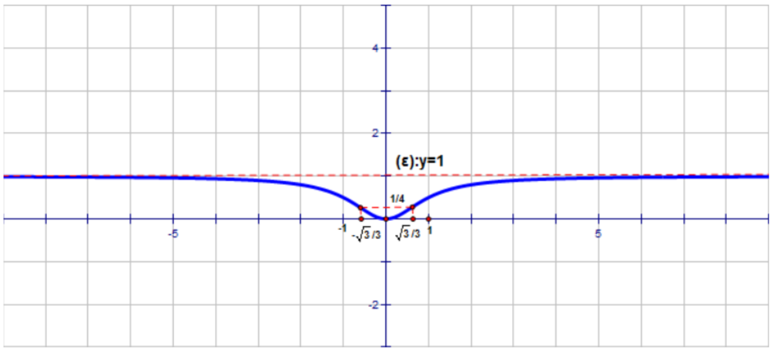
Η f παρουσιάζει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$.

B3. Η f είναι συνεχής στο R, άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Έτσι θα ψάξουμε για οριζόντιες – πλάγιες στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Επομένως η $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$.



<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Είναι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=1$.

Βάζοντας όπου x το e^x προκύπτει $\ln e^x \le e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \ge x+1$ (1) για κάθε $x \in R$, με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$.

Γ1. Από την (1) προκύπτει $e^{x^2} \ge x^2+1$ για κάθε $x \in R$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$. Έτσι για $x \ne 0$ είναι $e^{x^2} > x^2+1$.

Άρα μοναδική λύση της εξίσωσης είναι το 0.

Γ2. Για κάθε $x \in R$, $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right| \Leftrightarrow |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1$ (2)

Από τη (2) προκύπτει ότι $f(x) \ne 0$ για κάθε $x \ne 0$.

Η f είναι συνεχής στο R.

- Στο $(-\infty,0)$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο. Έτσι είναι $f(x)>0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)$.

  ▹ Αν $f(x)<0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)$, τότε $-f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1)$, $x<0$.

  ▹ Αν $f(x)>0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)$, τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x<0$.

- Στο $(0,+\infty)$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο. Έτσι είναι $f(x)>0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

  ▹ Αν $f(x)<0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, τότε $-f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1)$, $x>0$.

  ▹ Αν $f(x)>0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x>0$.

Έτσι πιθανοί τύποι της f είναι:

$$f(x)=\begin{cases}-(e^{x^2}-x^2-1)\ ,\ x<0\\ \quad 0 \qquad\qquad\quad ,\ x=0\\ -(e^{x^2}-x^2-1)\ ,\ x>0\end{cases}=-(e^{x^2}-x^2-1)\ ,\ x\in R$$

$$f(x)=\begin{cases}-(e^{x^2}-x^2-1)\ ,\ x<0\\ \quad 0 \qquad\qquad\quad ,\ x=0\\ e^{x^2}-x^2-1 \qquad ,\ x>0\end{cases}=\begin{cases}-(e^{x^2}-x^2-1)\ ,\ x<0\\ e^{x^2}-x^2-1 \qquad ,\ x\geq 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x^2-1 \qquad ,\ x<0\\ \quad 0 \qquad\qquad\quad ,\ x=0\\ -(e^{x^2}-x^2-1)\ ,\ x>0\end{cases}=\begin{cases}e^{x^2}-x^2-1 \qquad ,\ x<0\\ -(e^{x^2}-x^2-1)\ ,\ x\geq 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x^2-1\ ,\ x<0\\ \quad 0 \qquad\quad ,\ x=0\\ e^{x^2}-x^2-1\ ,\ x>0\end{cases}=e^{x^2}-x^2-1\ ,\ x\in R$$

Γ3. Για κάθε $x\in R$, $f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x$.

$f''(x)=e^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x+e^{x^2}\cdot 2-2=4x^2\cdot e^{x^2}+2e^{x^2}-2=4x^2\cdot e^{x^2}+2(e^{x^2}-1)\geq 0$, με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$		
$f(x)$			

Επομένως η f είναι κυρτή στο R.

Γ4. Θεωρώ συνάρτηση $\varphi(x)=f(x+3)-f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Για κάθε $x\in R$, $\varphi'(x)=f'(x+3)-f'(x)>0$ αφού, $x+3>x \overset{f'\ \text{γν.αύξ.}}{\underset{R}{\Rightarrow}} f'(x+3)>f'(x)\Rightarrow$

$f'(x+3)-f'(x)>0$.

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο R και άρα $1-1$.

Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$\varphi(|\eta\mu x|)=\varphi(|x|)\underset{1-1}{\overset{\varphi}{\Leftrightarrow}}|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$, αφού γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\eta\mu x dx=\pi\Rightarrow -\int_0^\pi f(x)(\sigma\upsilon\nu x)'dx+\int_0^\pi (f'(x))'\eta\mu x dx=\pi$

$\Rightarrow -\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi$

$\Rightarrow -f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\sigma\upsilon\nu 0+f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\eta\mu 0=\pi\Rightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \quad (1)$

Θεωρώ $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ κοντά στο 0 με $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

Κοντά στο 0 είναι $f(x)=g(x)\eta\mu x$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(g(x)\cdot\eta\mu x)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x\Rightarrow f(0)=1\cdot 0\Rightarrow f(0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, αφού η f είναι συνεχής στο R ως παραγωγίσιμη, άρα και στο 0.

Έτσι από την (1) προκύπτει $f(\pi)=\pi$.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot 1=1.$

Δ2. Από τη δοθείσα σχέση παραγωγίζοντας προκύπτει:

Για κάθε $x\in R$, $e^{f(x)}f'(x)+1=f'(f(x))f'(x)+e^x\Leftrightarrow f'(x)(e^{f(x)}-f'(f(x))=e^x-1$.

Για $x\neq 0$ προφανώς $e^x-1\neq 0$ και άρα $f'(x)\neq 0$.

Επίσης $f'(0)=1\neq 0$. Άρα $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και η f' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Άρα η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και επειδή $f'(0)=1>0$, θα είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R που είναι ανοιχτό διάστημα και άρα δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Δ3. Η f είναι συνεχής στο R και γνησίως αύξουσα σ' αυτό. Άρα $f(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$.

Όμως δίνεται ότι $f(R)=(-\infty,+\infty)$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Κοντά στο $+\infty$ είναι: $|\eta\mu x|\le 1 \Rightarrow \dfrac{|\eta\mu x|}{|f(x)|}\le \dfrac{1}{|f(x)|} \Rightarrow \left|\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}\right| \le \dfrac{1}{|f(x)|} \Rightarrow -\dfrac{1}{|f(x)|}\le \dfrac{\eta\mu x}{f(x)} \le \dfrac{1}{|f(x)|}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|f(x)|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|f(x)|}\right)=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}=0$. Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right)=0+0=0$.

Δ4. Θέτω $u=\ln x$, οπότε $du=\dfrac{1}{x}dx$, $u_1=0$, $u_2=\pi$.

Έτσι θέλουμε να δείξουμε ότι $0<\int_0^\pi f(u)du<\pi^2$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα και στο $[0,\pi]$.

$0\le u\le\pi \Rightarrow f(0)\le f(u)\le f(\pi) \Rightarrow 0\le f(u)\le\pi$ με τα ίσον να ισχύουν μόνο για $x=0$

και $x=\pi$ αντίστοιχα.

Έτσι $\int_0^\pi 0du<\int_0^\pi f(u)du<\int_0^\pi \pi du \Rightarrow 0<\int_0^\pi f(u)du<\pi^2$. (να γίνει η αντίστοιχη απόδειξη)